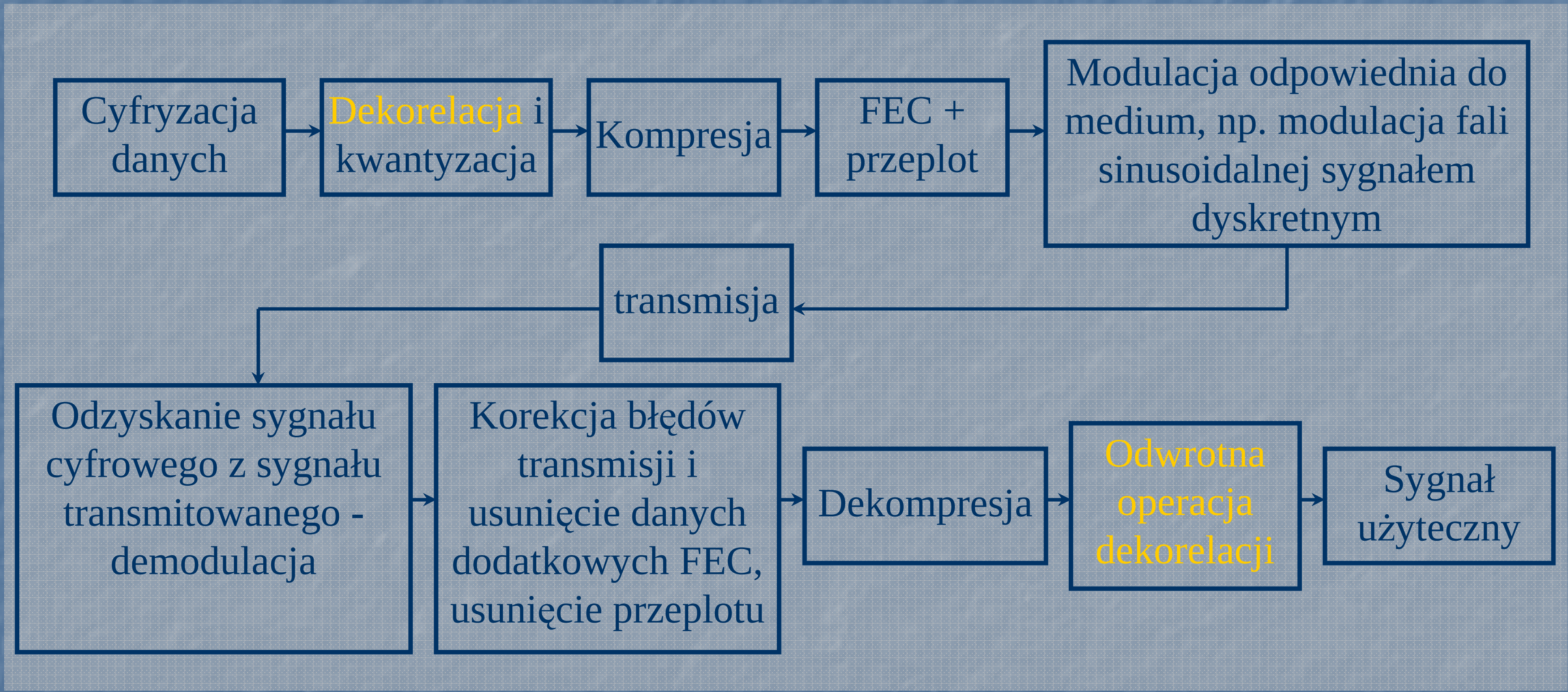
Cyfrowe przetwarzanie i kompresja danych

dr inż. Wojciech Zając

Wykład 4.

Dyskretna transformata kosinusowa

Schemat przetwarzania danych w systemie cyfrowym



Dekorelacja

- usuwanie korelacji – wzajemnej zależności statystycznej danych w zbiorze

Przekształcenie Fouriera

Funkcja ciągłą opisana w dziedzinie rzeczywistej przekształcana jest do postaci sumy harmonicznych

- proste przekształcenie Fouriera

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

- odwrotne przekształcenie Fouriera

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} dt$$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

- proste dyskretne przekształcenie Fouriera

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)}$$

- odwrotne dyskretne przekształcenie Fouriera

$$x(j) = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{k=1}^{N} X(k)\omega_N^{-(j-1)(k-1)}$$

$$\omega_N = e^{\frac{(-2\pi i)}{N}}$$

Dyskretne przekształcenie Fouriera

- DFT w postaci macierzowej

$$Y = DFT \times X$$

- IDFTw postaci macierzowej

$$X' = Y \times DFT$$

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ X_{N-1} \end{bmatrix} \quad DFT = \begin{bmatrix} c_N^{-0,0} & . & . & . & c_N^{-(N-1),0} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ c_N^{-0,(N-1)} & . & . & . & c_N^{-(N-1),(N-1)} \end{bmatrix}$$

Fast Fourier Transform

- Najpopularniejszą wersją FFT jest FFT o podstawie 2. Jest to bardzo efektywna operacja, jednak wektor próbek wejściowych (spróbkowany sygnał) musi mieć długość N = 2k, gdzie k to pewna liczba naturalna. Wynik otrzymuje się na drodze schematycznych przekształceń, opartych o tak zwane struktury motylkowe.

- Złożoność obliczeniowa FFT wynosi $n \log n$, zamiast n^2 pierwotnego algorytmu.

Skuteczność dekorelacji

Skuteczność dekorelacji mierzy się na drodze określenia MSE (MSE=0 oznacza idealną dekorelację)

Uszeregowanie transformat pod względem minimalizacja zakłóceń średniokwadratowych :

1. KLT,
2. DCT,
3. slant,
4. WHT,
5. HT,
6. DFT,
7. DST.

Koszt numeryczny

transformacja	liczba op. mnożenia	liczba op. dodawania
KLT	$2N^3$	$2N^3$
slant	$2N^2$	$2N^2 \log_2 N$
FFT	$2N^2 \log_2 N$	$2N^2 \log_2 N$
DCT	$2N^2 \log_2 N$	$2N^2 \log_2 N$
WHT	0	$2N^2 \log_2 N$

Kryterium optymalizacji wielokryterialnej

Sprawność transformaty – wydajność dekorelacji w stosunku do kosztu numerycznego

Transformata optymalna KLT

- Zalety:
  - minimalizacja zakłóceń średniokwadratowych w sygnale odtworzonym (idealna dekorelacja danych)
- Wady:
  - największy spośród transformat koszt numeryczny ($2N^3$ operacji mnożenia i $2N^3$ operacji dodawania),
  - brak szybkiego algorytmu KLT,
  - konieczność wyznaczenia modelu kowariancji sygnału źródłowego, co stanowi złożone zadanie numeryczne.
  - konieczność wyznaczenia i transmisji do dekodera bazy transformacji KLT (diagonalizowanej macierzy kowariancji danych)

Transformata nieoptymalna DCT

Dla stacjonarnego procesu Markowa pierwszego rzędu transformata DCT osiąga sprawność (wydajność dekorelacji w stosunku do kosztu numerycznego) zbliżoną do sprawności transformaty KLT

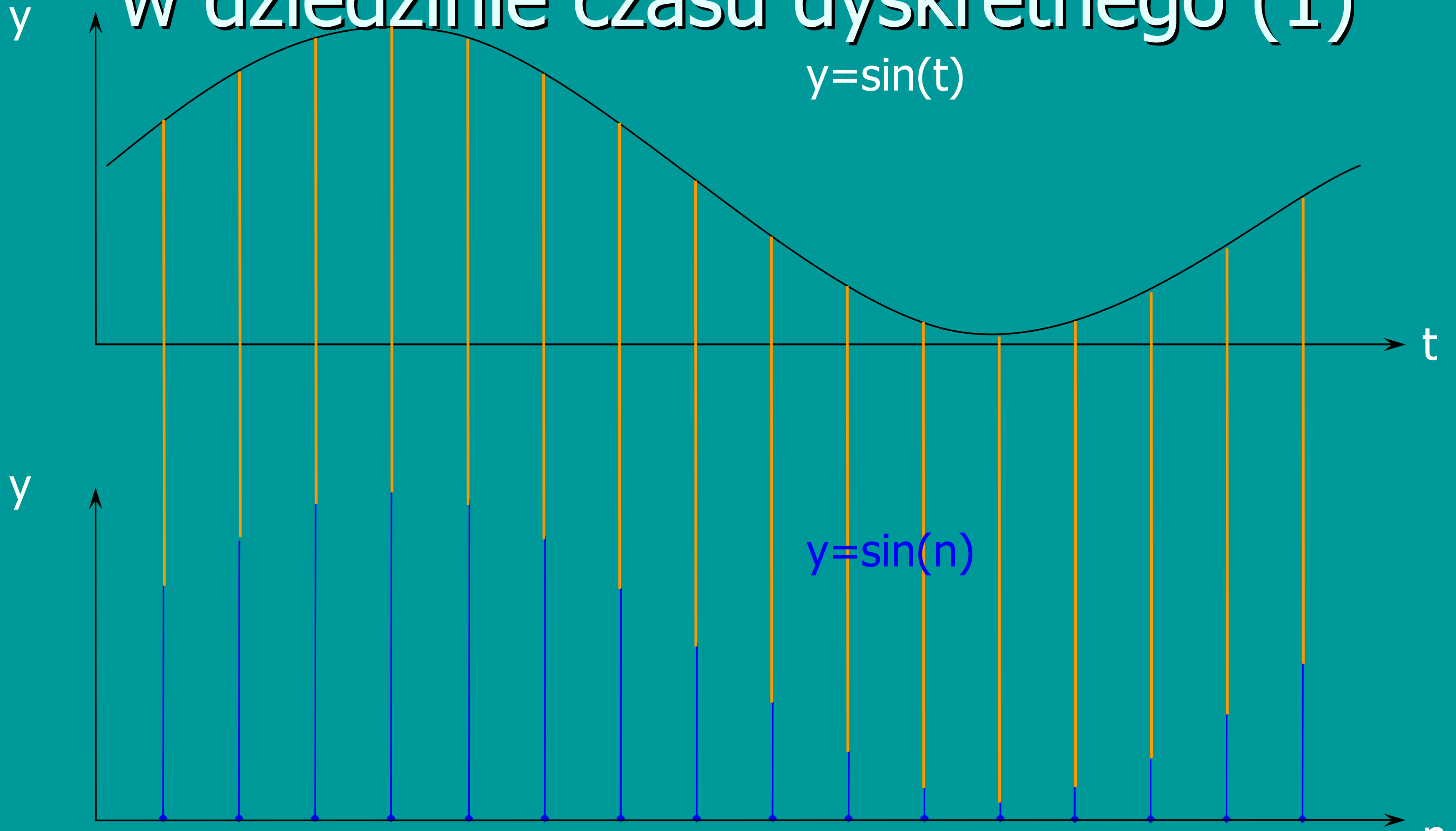
- Zalety
  - wysoka wydajność dekorelacji,
  - względnie mały koszt numeryczny.
- Wady
  - dekorelacja odbiegająca od idealnej,
  - efekt blokowy,
  - przy przetwarzaniu dla potrzeb silnej kompresji – występowanie artefaktów transformaty

Akceptowalny kompromis między jakością dekorelacji a kosztem numerycznym - powszechne zastosowanie w technice.

Efekt blokowy

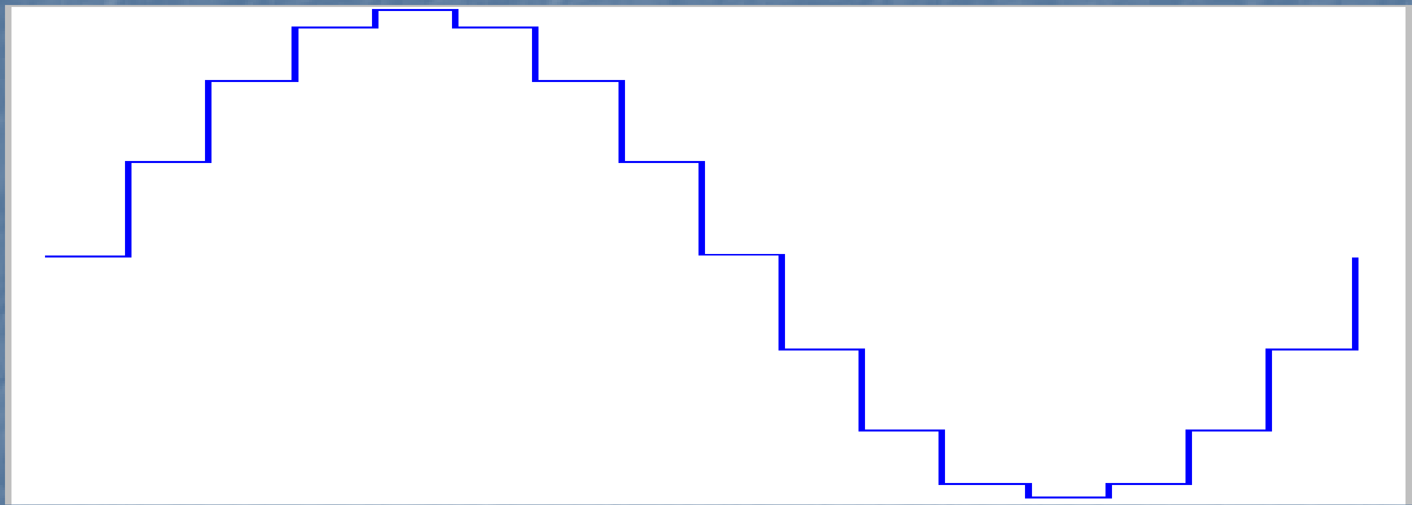
Artefakty transformaty DCT

Reprezentacja sygnału ciągłego w dziedzinie czasu dyskretnego (1)



N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y(n)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}

Reprezentacja sygnału ciągłego w dziedzinie czasu dyskretnego (2)



		0	38	70	92	100	92	71	38	0	-38	-70	-92	-100	-92	-70	-38	0		

Reprezentacja dwuwymiarowego sygnału ciągłego w dziedzinie czasu dyskretnego

51	59	36	33	35	30	16	29
22	26	23	22	19	18	20	24
21	22	24	18	14	16	16	37
19	20	18	17	15	24	27	70
49	29	34	28	9	30	48	56
73	48	47	62	26	40	67	39
72	88	39	54	59	55	31	97
68	86	82	46	31	42	94	176

Zmiana dziedziny opisu sygnału - analiza częstotliwościowa lub inaczej – transformacja sygnału

- Przetwarzanie za pomocą transformat wykorzystuje fakt, że dowolny sygnał *s* może być przedstawiony za pomocą liniowej kombinacji pewnych funkcji elementarnych, zwanych funkcjami bazowymi f_i.

$$s = \sum_i C_i f_i$$

gdzie C_i jest stałą

- Discrete Fourier Transform - DFT
- Fast Fourier Transform - FFT
- Discrete Cosine Transform - DCT
- Discrete Wavelet Transform - DWT

Discrete Cosine Transform DCT (1)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \qquad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao, "Discrete Cosine Transform", *IEEE Trans. Computers*, 90-93, Jan 1974.

N. Ahmed, "How I came up with the Discrete Cosine Transform", *Digital Signal Processing*, Vol. 1, p.4-5 (1991).

Discrete Cosine Transform DCT (1)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \quad 1 < i \leq 2^K,\ 1 \leq j \leq 2^K \end{cases}$$

Ważną cechą transformaty DCT jest konieczność operacji na liczbie danych będącej potęgą dwójki. Oznacza to, że liczba próbek może wynosić:

K=0, $2^K = 1$,
K=1, $2^K = 2$,
K=2, $2^K = 4$,
K=3, $2^K = 8$,
K=4, $2^K = 16$, ...

Discrete Cosine Transform DCT (1)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \quad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

Ważną cechą transformaty DCT jest konieczność operacji na liczbie danych będącej potęgą dwójki. Oznacza to, że liczba próbek może wynosić:

K=0, $2^K = 1$,

K=1, $2^K = 2$,

K=2, $2^K = 4$,

K=3, $2^K = 8$,

K=4, $2^K = 16$, ...

Discrete Cosine Transform DCT (2)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \quad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

	j=1	2	…	2^K
i=1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	…	$c_{1,2^K}$
2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	…	$c_{2,2^K}$
…	…	…	…	…
2^K	$c_{2^K,1}$	$c_{2^K,2}$	…	$c_{2^K,2^K}$

Discrete Cosine Transform DCT (2)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \qquad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

K=3 oznacza
i=1..8,
j=1..8

$$DCT_{i,j} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} & c_{1,7} & c_{1,8} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} & c_{2,7} & c_{2,8} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} & c_{3,7} & c_{3,8} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,1} & c_{4,6} & c_{4,7} \\ c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} & c_{5,6} & c_{5,7} & c_{5,8} \\ c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} \\ c_{7,1} & c_{7,2} & c_{7,3} & c_{7,4} & c_{7,5} & c_{7,6} & c_{7,7} & c_{7,8} \\ c_{8,1} & c_{8,2} & c_{8,3} & c_{8,4} & c_{8,5} & c_{8,6} & c_{8,7} & c_{8,8} \end{bmatrix}$$

Discrete Cosine Transform DCT (2)

Funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}} \right] & dla \quad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

K=3 oznacza
i=1..8,
j=1..8

$$DCT_{i,j} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} & c_{1,7} & c_{1,8} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} & c_{2,7} & c_{2,8} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} & c_{3,7} & c_{3,8} \\ c_{4,1} & c_{4,2} & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} & c_{4,1} & c_{4,6} & c_{4,7} \\ c_{5,1} & c_{5,2} & c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} & c_{5,6} & c_{5,7} & c_{5,8} \\ c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} & c_{6,1} \\ c_{7,1} & c_{7,2} & c_{7,3} & c_{7,4} & c_{7,5} & c_{7,6} & c_{7,7} & c_{7,8} \\ c_{8,1} & c_{8,2} & c_{8,3} & c_{8,4} & c_{8,5} & c_{8,6} & c_{8,7} & c_{8,8} \end{bmatrix}$$

Jak obliczyć współczynniki $c_{i,j}$?

Discrete Cosine Transform DCT (3)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}} \right] & dla \quad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

Discrete Cosine Transform DCT (3)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2^K}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{2^K}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2^{K+1}}\right] & dla \quad 1 < i \le 2^K,\ 1 \le j \le 2^K \end{cases}$$

$$K = 3$$

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \qquad 1 < i \leq 8,\ 1 \leq j \leq 8 \end{cases}$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16} \right] & dla \qquad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[\left(2j-1\right)\left(i-1\right)\dfrac{\pi}{16} \right] & dla \qquad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[\left(2j-1\right)\frac{\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe *f_i* transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \qquad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16} \right] & dla \qquad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 4, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 4, 1 \le j \le 8$$

$$f_5 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{4\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 5, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad dla \quad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16}\right] \quad dla \quad i = 4, 1 \le j \le 8$$

$$f_5 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{4\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 5, 1 \le j \le 8$$

$$f_6 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{5\pi}{16}\right] \quad dla\, i = 6, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16} \right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \quad dla \quad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 4, 1 \le j \le 8$$

$$f_5 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{4\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 5, 1 \le j \le 8$$

$$f_6 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{5\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 6, 1 \le j \le 8$$

$$f_7 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{6\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 7, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (4)

Dla K=3 funkcje bazowe f_i transformaty DCT mają postać:

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16} \right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \quad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{2\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 4, 1 \le j \le 8$$

$$f_5 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{4\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 5, 1 \le j \le 8$$

$$f_6 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{5\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 6, 1 \le j \le 8$$

$$f_7 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{6\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 7, 1 \le j \le 8$$

$$f_8 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{7\pi}{16} \right] \quad dla \quad j = 8, 1 \le j \le 8$$

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad dla \qquad i = 1,\ 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_2 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[\left(2j - 1 \right) \frac{\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 2,\ 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_3 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[\left(2j-1\right)\frac{2\pi}{16} \right] \quad dla \quad i = 3, 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_4 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{3\pi}{16} \right] \ dla \ i = 4, 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_5 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[\left(2j-1\right)\frac{4\pi}{16}\right] \; dla\, i = 5, 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_6 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{5\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 6, 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_7 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[\left(2j-1\right) \frac{6\pi}{16} \right] \quad dla\, i = 7, 1 \le j \le 8$$

	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (5)

$$f_8 = \sqrt{\frac{2}{8}} \cos\left[(2j-1)\frac{7\pi}{16} \right] \; dla \; j = 8, 1 \le j \le 8$$

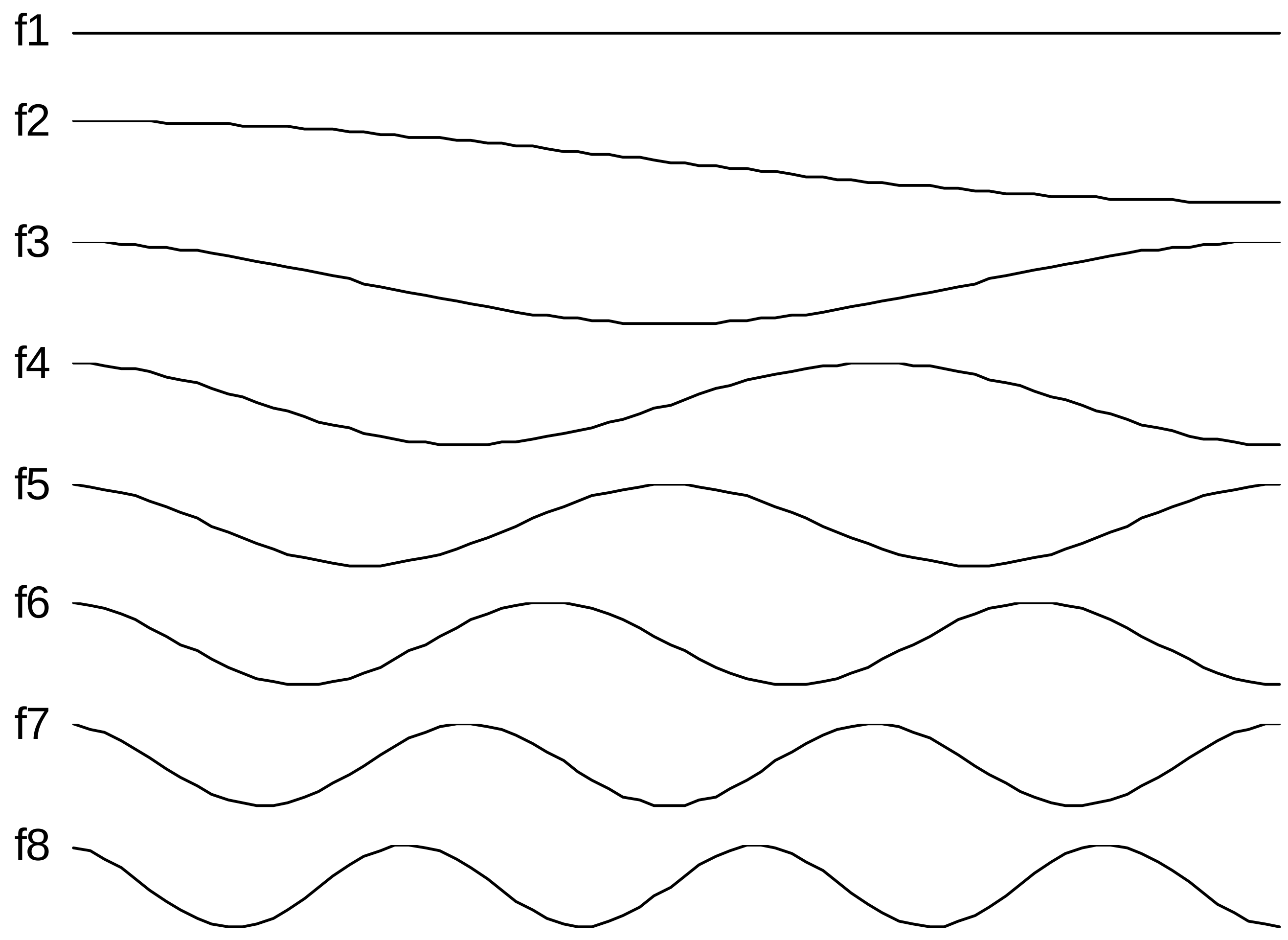
	j=1	2	3	4	5	6	7	8
f_1								
f_2								
f_3								
f_4								
f_5								
f_6								
f_7								
f_8								

Discrete Cosine Transform DCT (6)

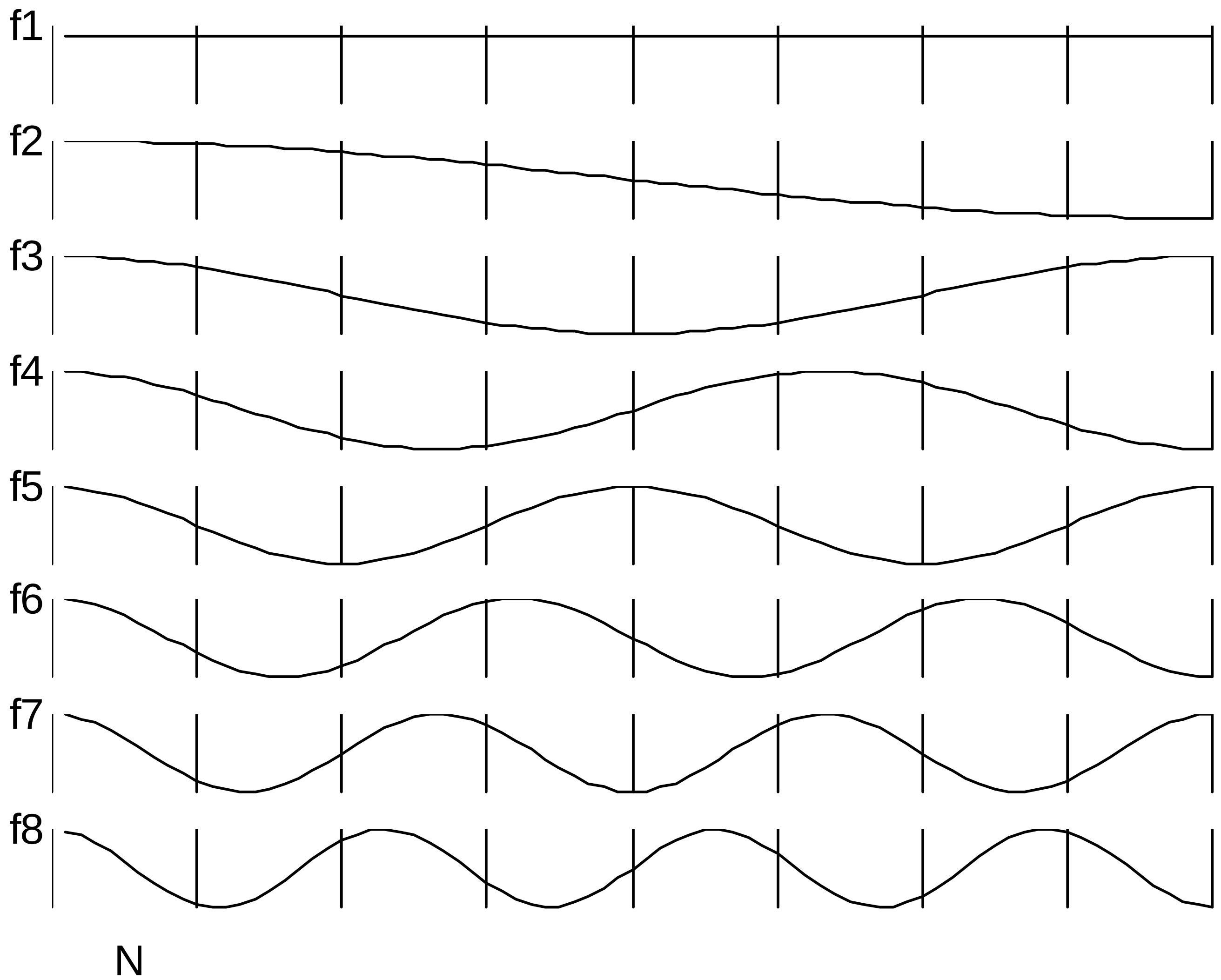
```
function f=dct1d()

% generowanie macierzy wspolczynnikw DCT

N=8;

for i=1:N
 for j=1:N
   if i==1
     f(i,j)=1/sqrt(8);
   else
     f(i,j)=sqrt(2/8)*cos((2*j-1)*(i-1)*pi/16);
   end
 end
end
```

$$f_i = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{8}} & dla \quad i = 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{8}}\cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{16}\right] & dla \quad 1 < i \le 8,\ 1 \le j \le 8 \end{cases}$$

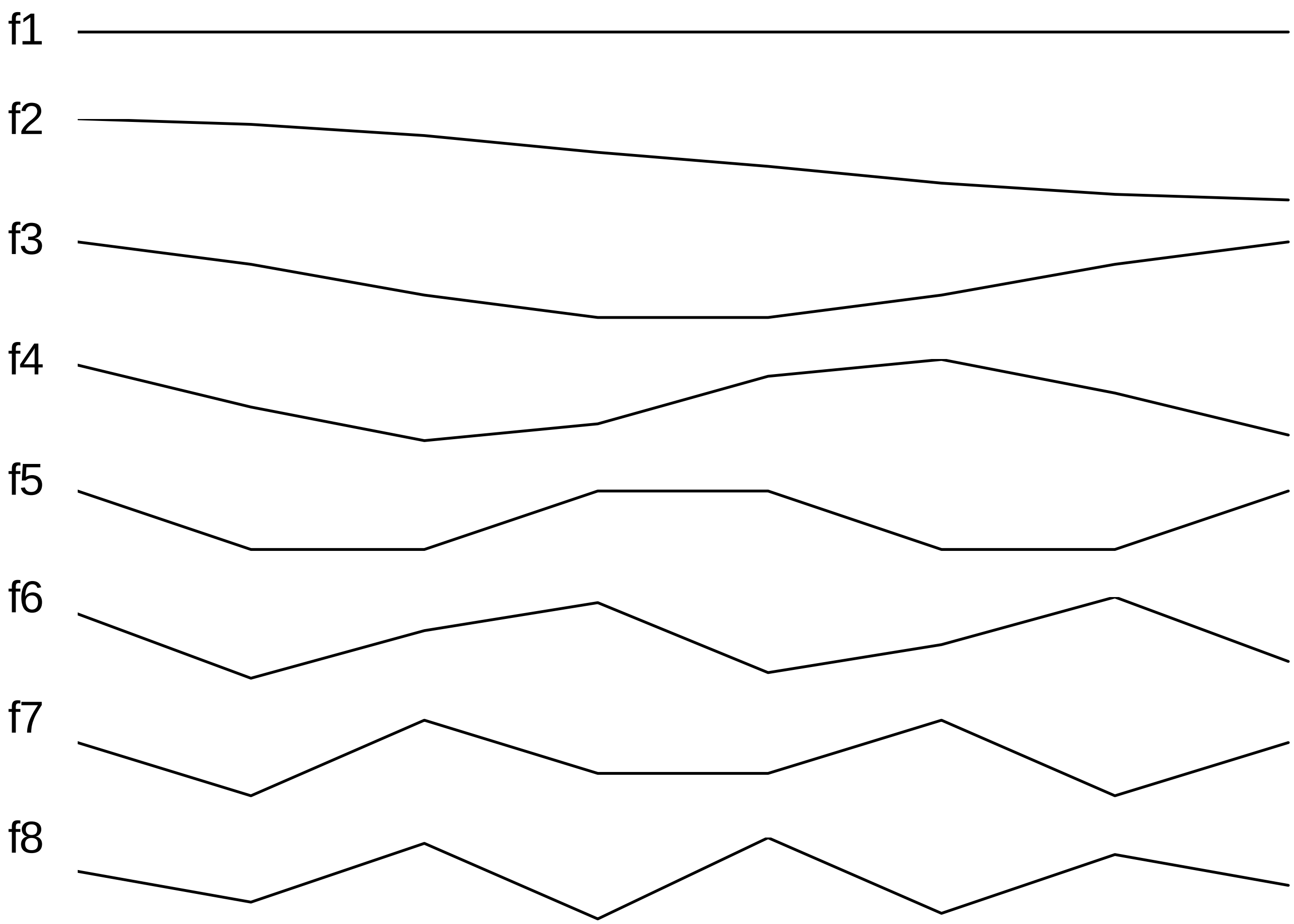
Discrete Cosine Transform



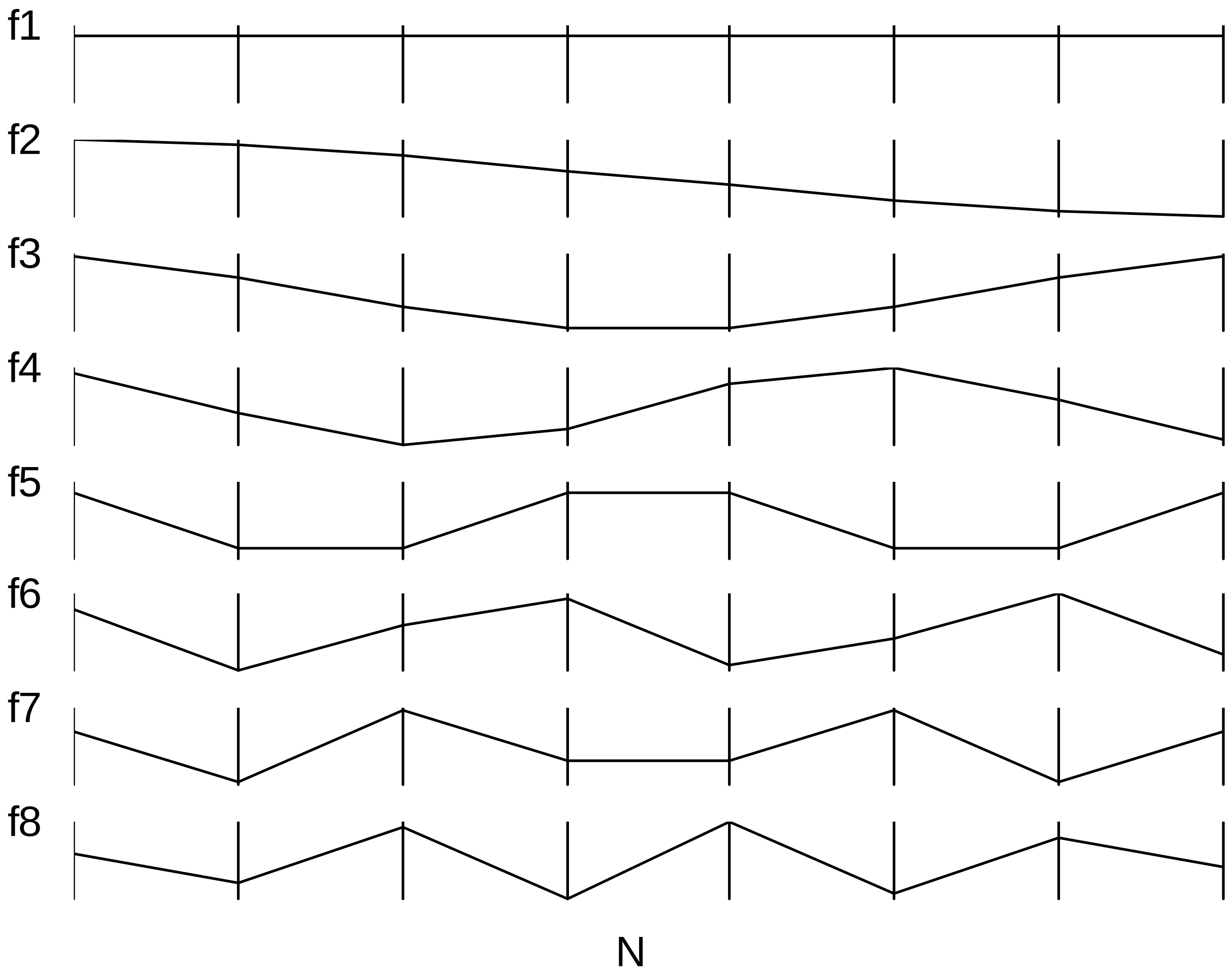
Discrete Cosine Transform



Discrete Cosine Transform



Discrete Cosine Transform



Discrete Cosine Transform

$$DCT_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N}} & dla \quad i = 1,\ 1 \le j \le N \\ \sqrt{\dfrac{2}{N}} \cos\left[(2j-1)(i-1)\dfrac{\pi}{2N}\right] & dla \quad 1 < i \le N,\ 1 \le j \le N. \end{cases}$$

$$DCT_{8\times 8} = \begin{bmatrix} 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 \\ 0{,}4904 & 0{,}4157 & 0{,}2778 & 0{,}0975 & -0{,}0975 & -0{,}2778 & -0{,}4157 & -0{,}4904 \\ 0{,}4619 & 0{,}1913 & -0{,}1913 & -0{,}4619 & -0{,}4619 & -0{,}1913 & 0{,}1913 & 0{,}4619 \\ 0{,}4517 & -0{,}0975 & -0{,}4904 & -0{,}2778 & 0{,}2778 & 0{,}4904 & 0{,}0975 & -0{,}4157 \\ 0{,}3536 & -0{,}3536 & -0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & -0{,}3536 & -0{,}3536 & 0{,}3536 \\ 0{,}2778 & -0{,}4904 & 0{,}0975 & 0{,}4157 & -0{,}4157 & -0{,}0975 & 0{,}4904 & -0{,}2775 \\ 0{,}1913 & -0{,}4619 & 0{,}4619 & -0{,}1913 & -0{,}1913 & 0{,}4619 & -0{,}4619 & 0{,}1913 \\ 0{,}0975 & -0{,}2778 & 0{,}4157 & -0{,}4904 & 0{,}4904 & -0{,}4157 & 0{,}2778 & -0{,}0975 \end{bmatrix}$$

Obliczanie transformaty

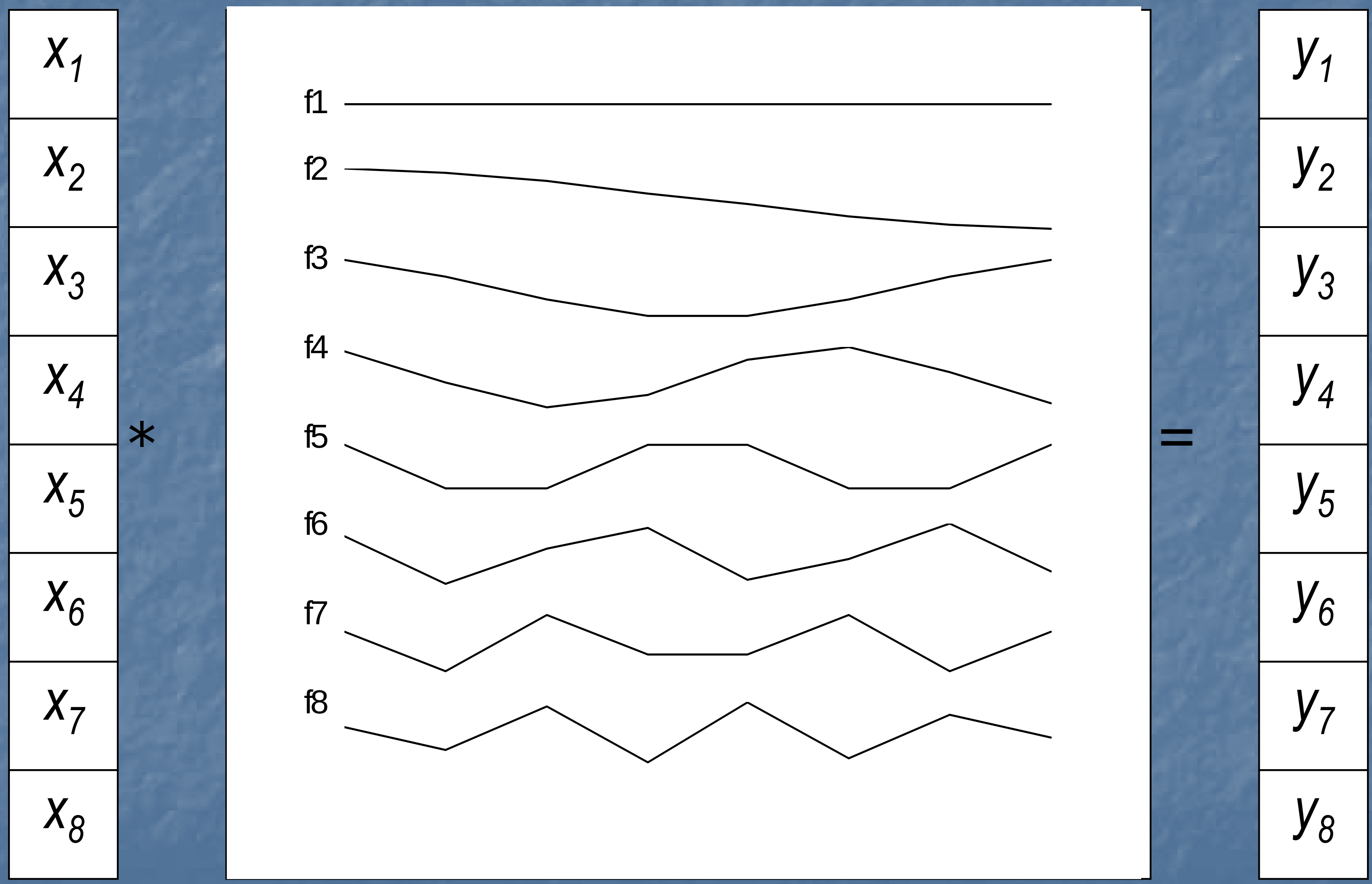
- Przekształcenie proste wektora 8x1

$$Y = DCT * X$$

- Przekształcenie odwrotne wektora 8x1

$$X = DCT^{T} * Y$$

Obliczanie transformaty



Obliczanie transformaty

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} DCT_{8x8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}$$

Obliczanie transformaty

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}
*
DCT_{8\times 8} = \begin{bmatrix}
0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 \\
0{,}4904 & 0{,}4157 & 0{,}2778 & 0{,}0975 & -0{,}0975 & -0{,}2778 & -0{,}4157 & -0{,}4904 \\
0{,}4619 & 0{,}1913 & -0{,}1913 & -0{,}4619 & -0{,}4619 & -0{,}1913 & 0{,}1913 & 0{,}4619 \\
0{,}4517 & -0{,}0975 & -0{,}4904 & -0{,}2778 & 0{,}2778 & 0{,}4904 & 0{,}0975 & -0{,}4157 \\
0{,}3536 & -0{,}3536 & -0{,}3536 & 0{,}3536 & 0{,}3536 & -0{,}3536 & -0{,}3536 & 0{,}3536 \\
0{,}2778 & -0{,}4904 & 0{,}0975 & 0{,}4157 & -0{,}4157 & -0{,}0975 & 0{,}4904 & -0{,}2775 \\
0{,}1913 & -0{,}4619 & 0{,}4619 & -0{,}1913 & -0{,}1913 & 0{,}4619 & -0{,}4619 & 0{,}1913 \\
0{,}0975 & -0{,}2778 & 0{,}4157 & -0{,}4904 & 0{,}4904 & -0{,}4157 & 0{,}2778 & -0{,}0975
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}
$$

Dwuwymiarowa transformacja DCT

- Przekształcenie proste

$$Y = DCT * X * DCT^T$$

- Przekształcenie odwrotne

$$X' = DCT^T * Y * DCT$$

$$
\begin{bmatrix}
x_{11} & & & & \cdots & & & x_{18} \\
x_{21} & & & & \cdots & & & x_{28} \\
x_{31} & & & & \cdots & & & x_{38} \\
x_{41} & & & & \cdots & & & x_{48} \\
x_{51} & & & & \cdots & & & x_{58} \\
x_{61} & & & & \cdots & & & x_{68} \\
x_{71} & & & & \cdots & & & x_{78} \\
x_{81} & & & & \cdots & & & x_{88}
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
\\ \\ & DCT_{8x8} & \\ \\ \\
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
yp_{11} & & & & \cdots & & & \\
yp_{21} & & & & \cdots & & & \\
yp_{31} & & & & \cdots & & & \\
yp_{41} & & & & \cdots & & & \\
yp_{51} & & & & \cdots & & & \\
yp_{61} & & & & \cdots & & & \\
yp_{71} & & & & \cdots & & & \\
yp_{81} & & & & \cdots & & &
\end{bmatrix}
$$

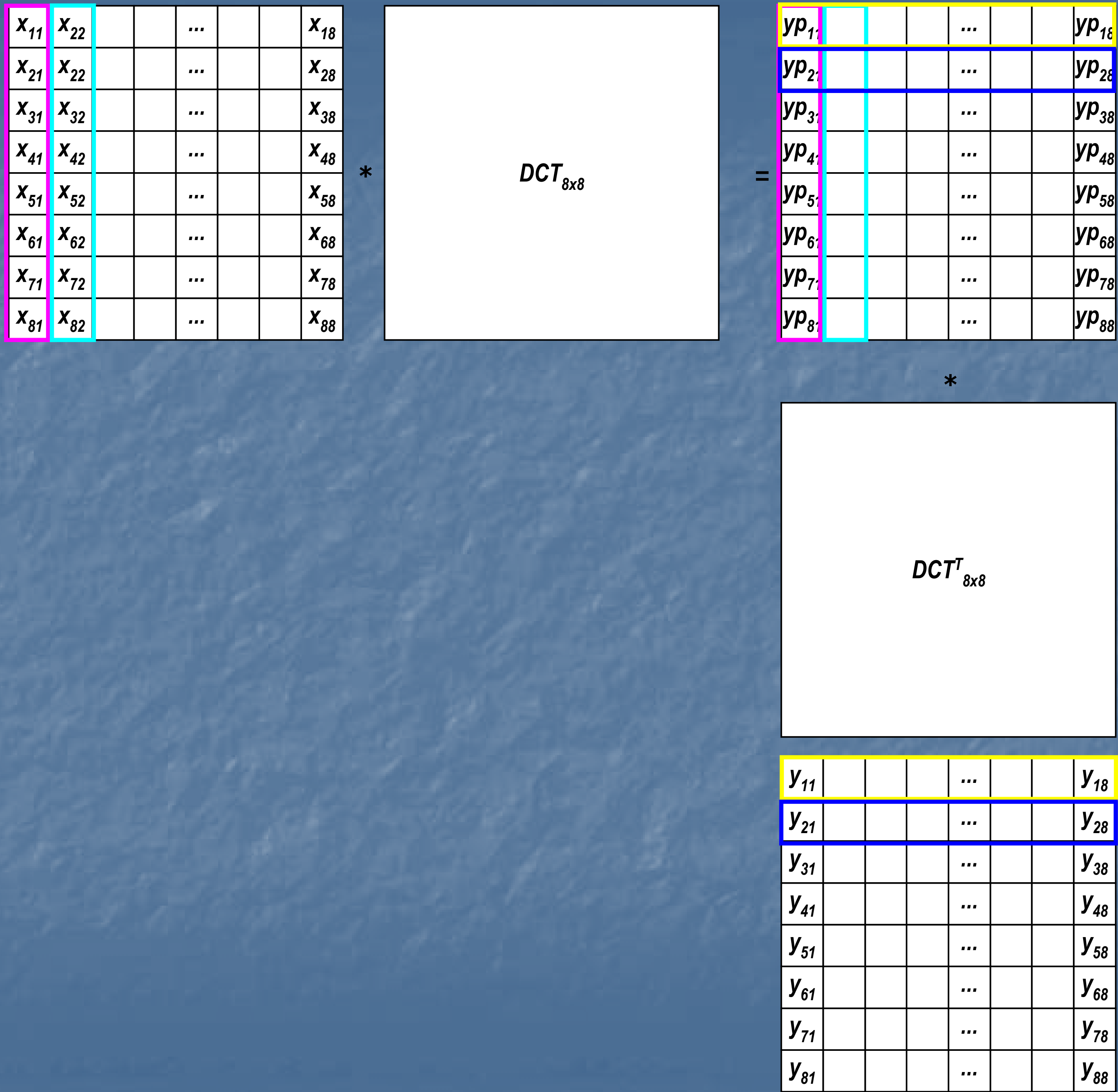
$$
\begin{bmatrix}
x_{11} & x_{22} & & & \cdots & & & x_{18} \\
x_{21} & x_{22} & & & \cdots & & & x_{28} \\
x_{31} & x_{32} & & & \cdots & & & x_{38} \\
x_{41} & x_{42} & & & \cdots & & & x_{48} \\
x_{51} & x_{52} & & & \cdots & & & x_{58} \\
x_{61} & x_{62} & & & \cdots & & & x_{68} \\
x_{71} & x_{72} & & & \cdots & & & x_{78} \\
x_{81} & x_{82} & & & \cdots & & & x_{88}
\end{bmatrix}
*
\begin{bmatrix}
 \\ \\ \\ & & & DCT_{8x8} & & & \\ \\ \\ \\
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
yp_{11} & & & & \cdots & & & yp_{18} \\
yp_{21} & & & & \cdots & & & yp_{28} \\
yp_{31} & & & & \cdots & & & yp_{38} \\
yp_{41} & & & & \cdots & & & yp_{48} \\
yp_{51} & & & & \cdots & & & yp_{58} \\
yp_{61} & & & & \cdots & & & yp_{68} \\
yp_{71} & & & & \cdots & & & yp_{78} \\
yp_{81} & & & & \cdots & & & yp_{88}
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{22} & & & \cdots & & & x_{18} \\ x_{21} & x_{22} & & & \cdots & & & x_{28} \\ x_{31} & x_{32} & & & \cdots & & & x_{38} \\ x_{41} & x_{42} & & & \cdots & & & x_{48} \\ x_{51} & x_{52} & & & \cdots & & & x_{58} \\ x_{61} & x_{62} & & & \cdots & & & x_{68} \\ x_{71} & x_{72} & & & \cdots & & & x_{78} \\ x_{81} & x_{82} & & & \cdots & & & x_{88} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} DCT_{8x8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yp_{11} & & & & \cdots & & & yp_{18} \\ yp_{21} & & & & \cdots & & & yp_{28} \\ yp_{31} & & & & \cdots & & & yp_{38} \\ yp_{41} & & & & \cdots & & & yp_{48} \\ yp_{51} & & & & \cdots & & & yp_{58} \\ yp_{61} & & & & \cdots & & & yp_{68} \\ yp_{71} & & & & \cdots & & & yp_{78} \\ yp_{81} & & & & \cdots & & & yp_{88} \end{bmatrix}$$

$$*$$

$$\begin{bmatrix} DCT^{T}_{8x8} \end{bmatrix}$$

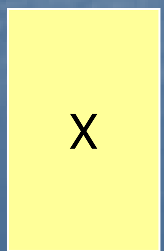
$$\begin{bmatrix} y_{11} & & & & \cdots & & & y_{18} \\ y_{21} & & & & \cdots & & & y_{28} \\ y_{31} & & & & \cdots & & & y_{38} \\ y_{41} & & & & \cdots & & & y_{48} \\ y_{51} & & & & \cdots & & & y_{58} \\ y_{61} & & & & \cdots & & & y_{68} \\ y_{71} & & & & \cdots & & & y_{78} \\ y_{81} & & & & \cdots & & & y_{88} \end{bmatrix}$$



x11 x22 ... x18
x21 x22 ... x28
x31 x32 ... x38
x41 x42 ... x48
x51 x52 ... x58
x61 x62 ... x68
x71 x72 ... x78
x81 x82 ... x88
*
DCT8x8
=
yp11 ... yp18
yp21 ... yp28
yp31 ... yp38
yp41 ... yp48
yp51 ... yp58
yp61 ... yp68
yp71 ... yp78
yp81 ... yp88
*
DCTT8x8
y11 ... y18
y21 ... y28
y31 ... y38
y41 ... y48
y51 ... y58
y61 ... y68
y71 ... y78
y81 ... y88

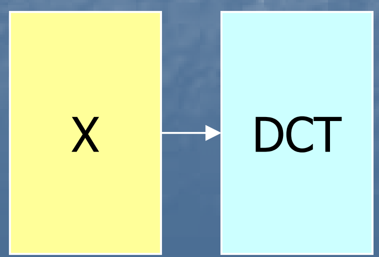
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych



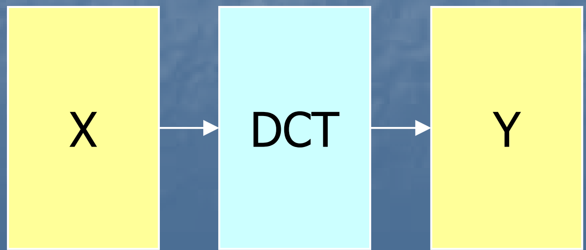
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta



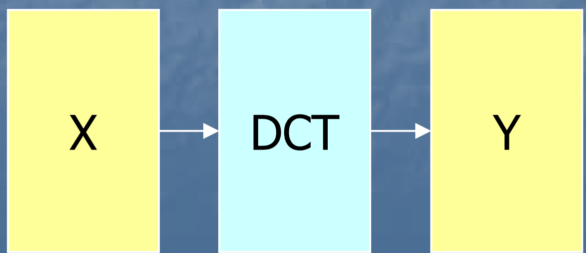
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych



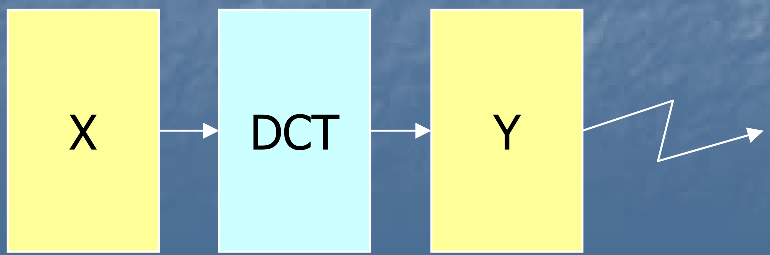
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału



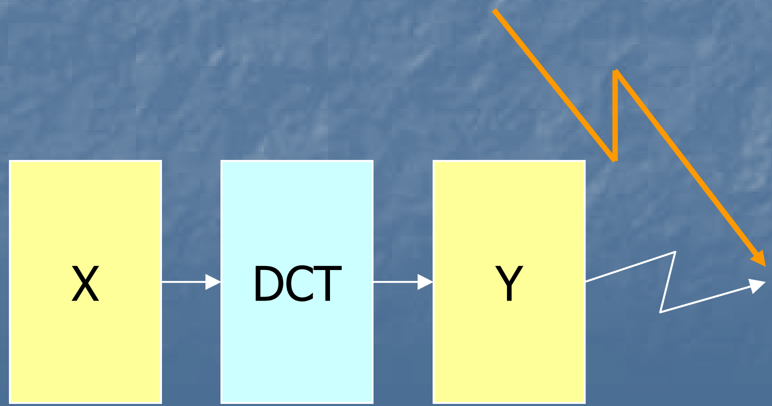
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału
- transmisja



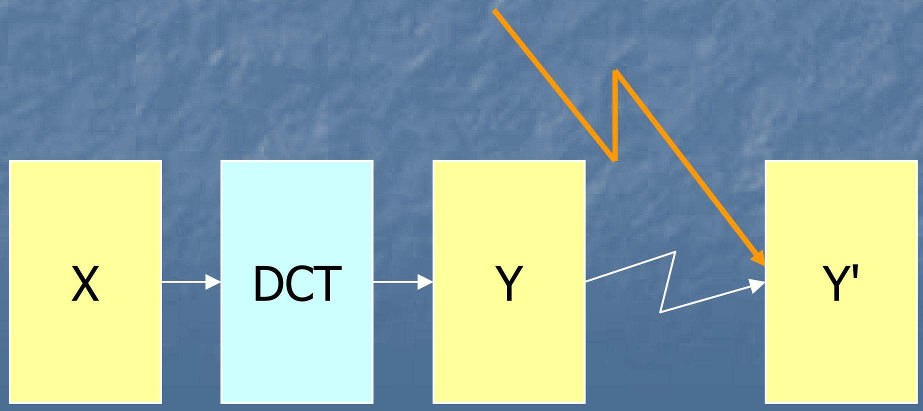
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału
- transmisja + zakłócenia



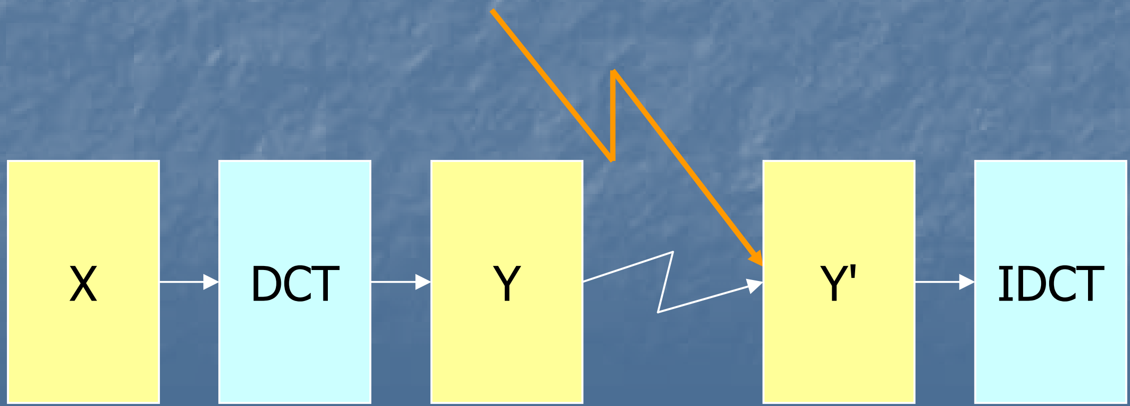
Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału
- transmisja + zakłócenia
- macierz danych częstotliwościowych + zakłócenia bitowe



Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału
- transmisja + zakłócenia
- macierz danych częstotliwościowych + zakłócenia bitowe
- transformata odwrotna



Powstawanie zakłóceń DCT

- macierz danych przestrzennych
- transformata prosta
- macierz danych częstotliwościowych
- przetwarzanie kanału
- transmisja + zakłócenia
- macierz danych częstotliwościowych + zakłócenia bitowe
- transformata odwrotna
- macierz danych przestrzennych + zakłócenia